Teorema de Hurwitz

Javier López-Contreras

16 de juliol de 2022

Objectiu

L'objectiu de la presentació és demostrar el següent teorema.

Teorema (Hurwitz)

Sigui M una S.R. compacta de gènere $g \geq 2$, aleshores $Aut(M)$ és finit i $|Aut(M)| \leq 84(g-1)$

Comentari

Els casos petits els tenim controlats

1. $g = 0$, *holomorfismes* $f : \mathbb{P}_{\mathbb{C}} \mapsto \mathbb{P}_{\mathbb{C}}$. *Möbius transformations.*
2. $g = 1$, *holomorfismes* $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ *que deixen invariant el reticle* Λ.
   $\Longrightarrow F(z) = az + b$ *amb* $a\Lambda = \Lambda$, $|a| = 1$.

Esquema de la demostració

- $Aut(M)$ és finit.
  - Teorema de gaps de Weierstrass.
  - Estudi dels punts de Weierstrass.
- $|Aut(M)| \leq 84(g-1)$.
  - Estructura complexa a $M/Aut(M)$.
  - Identitat de Riemann-Hurwitz al recobriment ramificat definit pel pas a quocient $\pi : M \mapsto M/Aut(M)$.

Recordatori Riemann-Hurwitz

Lema (Identitat de Riemann-Hurwitz)

Siguin R i T dues S.R. de gèneres g i γ respectivament. Sigui $f : R \mapsto T$ un holomorfisme no constant. Sigui N el grau del recobriment ramificat definit per f i

$$B = \sum_{P \in R} b_f(P),$$

on $b_f(P)$ és el número de ramificació de P a f. Aleshores,

$$g - 2 = N(\gamma - 2) + 1 + \frac{B}{2}$$

Demostració feta a classe, aixecant una triangulació adient.

Teorema Gaps de Weierstrass

Teorema (Teorema Gaps de Weierstrass)

Sigui M una S.R. compacta de gènere $g > 0$ i $P \in M$ un punt arbitrari. Aleshores, existeixen exactament g enters

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g < 2g$$

tals que no hi ha cap funció f holomorfa a $M \setminus \{P\}$ i amb un pol d'ordre n_i a P.

- Non-gap si existeix $f \in L(D_n) \setminus L(D_{n-1})$ amb $D_n = nP$.

Per Riemann-Roch

- $l(D_n) - l(K - D_n) = n + 1 - g$
- Si prenem $n = 2g - 1 > 2g - 2$, aleshores $l(D_n) = n + 1 - g = g$

- $l(D_i) - l(D_{i-1}) \leq 1$. (RR o podries construir ϕ holomorfa)
- Els subespais vectorials $L(D_i) \setminus L(D_{i-1}) \cup \{0\} \in L(D_n)$ sempre tenen dimensió 0 o 1.

- Hi ha exactament g gaps entre $[1, 2g - 1]$.

Non-gaps

Siguin $1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_g = 2g$ els non-gaps.

Proposició (Propietats dels Non-Gaps)

1. *Formen un semi-grup additiu.*
2. $\alpha_j + \alpha_{g-j} \geq 2g$. *És igualtat per tot j sii $\alpha_1 = 2$.*
3. $\sum_{j=1}^{g-1} \alpha_j \geq g(g-1)$ *amb igualtat sii $\alpha_1 = 2$.*
4. $\alpha_1 = 2 \implies \alpha_i = 2i$ *i només passa a les M hiperel·líptiques.*

Si $\alpha_j + \alpha_{g-j} < 2g \implies \alpha_k + \alpha_{g-j} < 2g \, \forall k \leq j$ i per ser semigrup, hi hauria

$$(g-j)_{i \leq g-j} + (j)_{g-j < i < g} + (1)_g = g + 1$$

non-gaps $\leq 2g$, contradicció.

Definició (Punt de Weierstrass)

Un punt s'anomena de Weierstrass si els seus gaps no estan exactament a $\{1, 2, \cdots, g\}$, *es a dir* $\alpha_1 \neq g + 1$ *Al conjunt de punts de Weierstrass de M el denotem com* $W(M)$.

Proposició

1. $W(M)$ *és discret.*
2. $|W(M)| \geq 2g + 2$ *amb igualtat només a les M hiperel·líptiques.*

Dues possibles demostracions

- Estudiant l'existència de diferencials holomorfs adequats. (Farkas-Kra)
- Estudiants els punts d'inflexió d'un sistema lineal, el generat pel divisor canònic. (Miranda)

Existència de diferencials

Proposició

Un punt P d'una S.R. M compacta de gènere $g \geq 2$ és de Weierstrass si i només si existeix una 1-forma diferencial holomorfa amb un zero d'ordre $\geq \dim \Omega(M) = g$ at P.

És equivalent a $l(gP) \geq 1$, que implica que hi ha un non-gap a $[1, g]$, pel que P es Weierstrass.

Sistemes Lineals

Definició (Sistema lineal Complet d'un divisor)

Sigui $D \in Div(X)$*, definim el seu sistema lineal complet com*

$$|D| = \{E \in Div(X) \mid E \sim D \text{ and } E \geq 0\}$$

.

Un sistema lineal serà un subespai linear (projectiu) de $|D|$.

Proposició

Si M *és una S.R. compacta, l'aplicació* S *és bijectiva.*

$$S : \mathbb{P}(L(D)) \mapsto |D|$$

$$[f] \mapsto (f) - D$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tenim $(f) = (g) \implies (f/g) = 0 \implies f/g \in H(M)$ i com M és compacta $\implies f = cg$

Proposició

1. *Un automorfisme deixa $W(M)$ invariant*
2. *Hi ha un morfisme de grups natural $\rho : Aut(M) \mapsto Perm(W(M))$.*
3. *$Ker(\rho)$ és finit.*

Prenem $Id \neq T \in Aut(M)$.

- $Fix(T)$ és discret pel Principi d'Identitat
- T pot tenir com a màxim $2g + 2$ punts fixos
  - Prenem P no fix i $f \in K(M)$ tal que el seu divisor polar sigui $-rP$ amb $r \leq g + 1$.
  - $h = f - f \circ T \in K(M)$ té divisor polar $-rP - r(T^{-1}(P)) \implies$ té com a màxim $2r \leq 2g + 2$ zeros.
  - Tots els punts fixos de T són zeros d'h.

Si M no és hiperel·líptica, ρ és injectiva.
Si M és hiperel·líptica $Ker(\rho) = \{Id, J\}$, J la involució hiperel·líptica.

Corol·lari

$Aut(M)$ és finit.

Pel primer teorema d'isomorfisme

$$Aut(M)/Ker(\rho) \simeq Im(\rho) \subseteq Perm(W(M))$$

Estructura complexa de M/H

Proposició

Sigui $H \subseteq Aut(M)$ un subgrup finit. Per tot $P \in M$, $H_P = \{h \in H \mid h(P) = P\}$ és cíclic.

En una carta, $h_1, h_2, \cdots$ compleixen $h_i(0) = 0$ i formen un grup $\implies$ $\exists f$ conformal que envia un obert a D^2 tal que $f^{-1} h_i f$ és una rotació.

Escollim la d'angle mínim i serà generadora.

Corol·lari

M/H té una estructura de S.R. compatible amb $\pi : M \mapsto M/H$.

- Donat un $P \in M/H$, sigui $h : M \mapsto M$ l'automorfisme tal que $H_P = \langle h \rangle$.
- Coordenades locals a P sobre un obert U fix per h.
- Si la coordenada local a P és z, $z^{|H_P|}$ és coordenada local a P.

Propietats del revestiment $\pi : M \mapsto M/H$

Proposició

1. *És de grau* $|H|$
2. *El número de ramificació d'un* P *és* $b_\pi(P) = |H_P| - 1.$

Teorema de Automorfismes de Hurwitz

Teorema (Hurwitz)

Sigui M una S.R. compacta de gènere $g \geq 2$, aleshores $Aut(M) = G$ és finit i $|Aut(M)| \leq 84(g-1)$

- Denotem $v_P = |G \cdot P|$
- Trobem $B = \sum b_\pi(P) = \sum(|G_P| - 1) = N \sum \left(1 - \frac{1}{|v_P|}\right)$.
- La identitat de Riemann-Hurwitz

$$2g - 2 = N(2\gamma - 2) + N \sum \left(1 - \frac{1}{|v_P|}\right)$$

- Observem $2 \leq |v_P| \implies 1/2 \leq (1 - 1/v_P) \leq 1$

Casos I

Case I: $\gamma \geq 2$.

In this case we obtain from (1.3.1) that

$$2g - 2 \geq 2N \quad \text{or} \quad N \leq g - 1.$$

Case II: $\gamma = 1$.

In this case (1.3.1) becomes

$$2g - 2 = N \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right). \tag{1.3.2}$$

If $r = 0$, then also $g = 1$ (we assumed $g > 1$). This is the basic fact (the left hand side of (1.3.1) is ≥ 2) that will be used repeatedly. Thus (1.3.2) implies

$$2g - 2 \geq \tfrac{1}{2}N \quad \text{or} \quad N \leq 4(g - 1).$$

Case III: $\gamma = 0$.

We rewrite (1.3.1) as

$$2(g - 1) = N\left(\sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right) - 2\right), \tag{1.3.3}$$

and conclude that

$$r \geq 3$$

(since $2(g - 1) > 0$, $N > 1$, and $(1 - 1/\nu_j) < 1$ for each j).

Casos II

If $r \geq 5$, then (1.3.3) gives

$$2(g-1) \geq \tfrac{1}{2}N \quad \text{or} \quad N \leq 4(g-1).$$

If $r = 4$, then it cannot be that all the v_j are equal to 2. Thus, at least one is ≥ 3, and (1.3.3) gives

$$2(g-1) \geq N(\tfrac{3}{2} + \tfrac{2}{3} - 2) \quad \text{or} \quad N \leq 12(g-1).$$

It remains to consider the case $r = 3$. Without loss of generality we assume

$$2 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3. \tag{1.3.4}$$

Clearly $v_3 > 3$ (otherwise the right hand side of (1.3.3) is negative). Furthermore, $v_2 \geq 3$. If $v_3 \geq 7$, then (1.3.3) yields

$$2(g-1) \geq N(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{6}{7} - 2) \quad \text{or} \quad N \leq 84(g-1).$$

If $v_3 = 6$ and $v_1 = 2$, then $v_2 \geq 4$ and

$$N \leq 24(g-1).$$

If $v_3 = 6$ and $v_1 \geq 3$ (recall (1.3.4)), then

$$N \leq 12(g-1).$$

If $v_3 = 5$ and $v_1 = 2$, then $v_2 \geq 4$ and

$$N \leq 40(g-1).$$

If $v_3 = 5$ and $v_1 \geq 3$, then

$$N \leq 15(g-1).$$

If $v_3 = 4$, then $v_1 \geq 3$ and

$$N \leq 24(g-1).$$

This exhaustion (of cases) completes the proof.

S'assoleix?

genus g	Largest possible $\lvert Aut(X) \rvert$	X_0	$Aut(X_0)$
2	48	Bolza curve	$GL_2(3)$
3	168 (Hurwitz bound)	Klein quartic	$PSL_2(7)$
4	120	Bring curve	S_5
5	192		
6	150		
7	504 (Hurwitz bound)	Macbeath curve	$PSL_2(8)$
8	336		
9	320		
10	432		
11	240		

Definició (Quàrtica de Klein)

Els punts $(x, y, z) \in \mathbb{P}^2$ *tal que*

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0$$